

Fonctions sinus et cosinus

1) Définitions, propriétés et représentations graphiques :

a) Définitions et dérivabilité :

Définitions : On appelle fonction cosinus, notée \cos , la fonction définie sur \mathbb{R} qui à tout réel x associe $\cos(x)$.

On appelle fonction sinus, notée \sin , la fonction définie sur \mathbb{R} qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Exemples :

- $\cos(0) = 1$
- $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Propriété (admisses) :

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \sin'(x) = \cos(x)$$

Exemples d'utilisation :

- Par lecture sur le cercle trigonométrique, on sait que pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$.
Or, \sin est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'(x) = \cos(x)$.

Donc, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'(x) \geq 0$ et la fonction sinus est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Par lecture sur le cercle trigonométrique, on sait que pour tout $x \in [0 ; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ et dans $[0 ; \pi]$, $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$, donc les zéros de \sin sont isolés sur $[0 ; \pi]$.

Or, \cos est dérivable sur $[0 ; \pi]$ et, pour tout $x \in [0 ; \pi]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et les zéros de \sin sont isolés sur $[0 ; \pi]$.

Donc, pour tout $x \in [0 ; \pi]$, $\cos'(x) \leq 0$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$.

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors :

- la fonction f définie par $f(x) = \cos(u(x))$ pour tout $x \in I$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = u'(x) \times (-\sin(u(x))) = -u'(x) \times \sin(u(x))$$

- la fonction g définie par $g(x) = \sin(u(x))$ pour tout $x \in I$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$$

Démonstration :

- La fonction f est de la forme $f = \cos \circ u$ où :
 - u est dérivable sur I et à valeurs dans \mathbb{R}
 - \cos est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$

Donc, par composition, f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = u'(x) \times -\sin(u(x))$$

- La fonction g est de la forme $g = \sin \circ u$ où :
 - u est dérivable sur I et à valeurs dans \mathbb{R}
 - \sin est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$

Donc, par composition, g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$$

Exemple d'utilisation : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x^2)$.

La fonction f est de la forme $f = \sin \circ u$ où u est la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x^2$.
La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$.

Donc, par composition, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2x \cos(x^2)$$

b) Périodicité et parité :

Propriété (périodicité des fonctions sinus et cosinus) :

Pour tout réel x , on a $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques**, de période 2π .

Démonstration :

Sur le cercle trigonométrique le point M associé au réel x est également associé à $x + 2\pi$ (après avoir enroulé d'un tour la droite numérique sur le cercle trigonométrique), donc :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

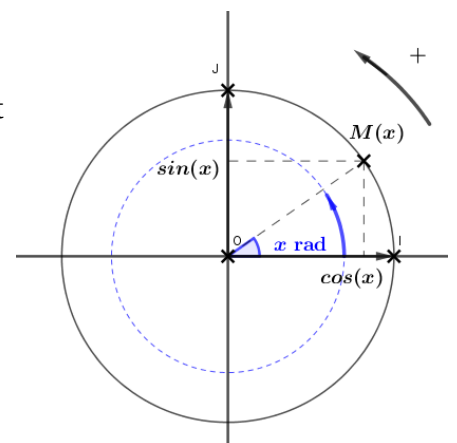
En appliquant cette propriété plusieurs fois, on peut la généraliser :

Propriété (admise) : Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

En particulier :

$$\cos(x - 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x - 2\pi) = \sin(x)$$



Propriété (admise, parité des fonctions sinus et cosinus) :

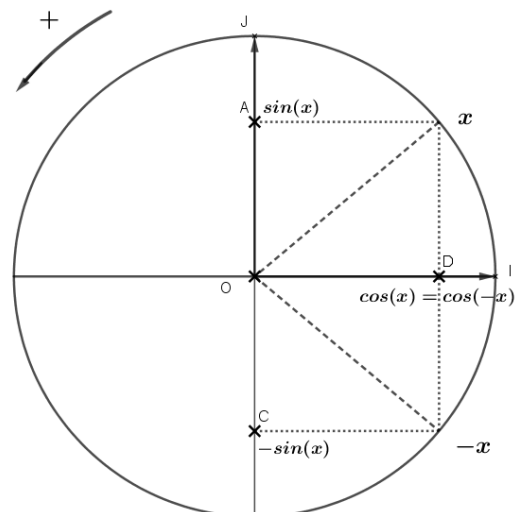
Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos(x)$: on dit que la fonction cosinus est **paire**.

Géométriquement, cela signifie que la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- $\sin(-x) = -\sin(x)$: on dit que la fonction cosinus est **impaire**.

Géométriquement, cela signifie que la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.



c) Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus :

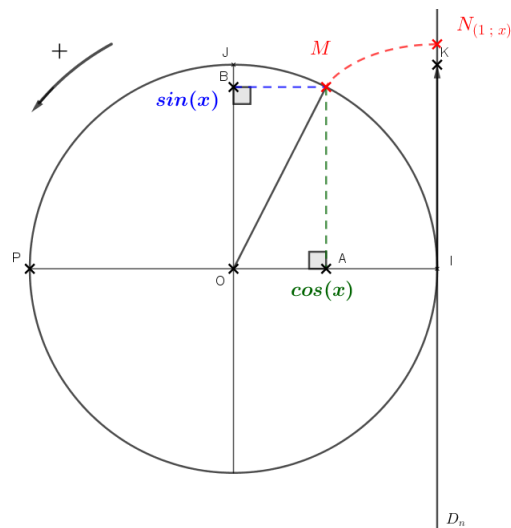
► Sens de variations des fonctions sinus et cosinus sur $[0 ; \pi]$:

- On a vu que \cos était strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$
On construit le tableau de variation de \cos sur $[0 ; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
\cos	1	0	-1

D'où le signe de $\cos(x)$ sur $[0 ; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	+	0	-



- On sait que, pour tout $x \in [0 ; \pi]$, $\sin'(x) = \cos(x)$, on déduit du signe de $\cos(x)$ le tableau le tableau de variation de \sin sur $[0 ; \pi]$:

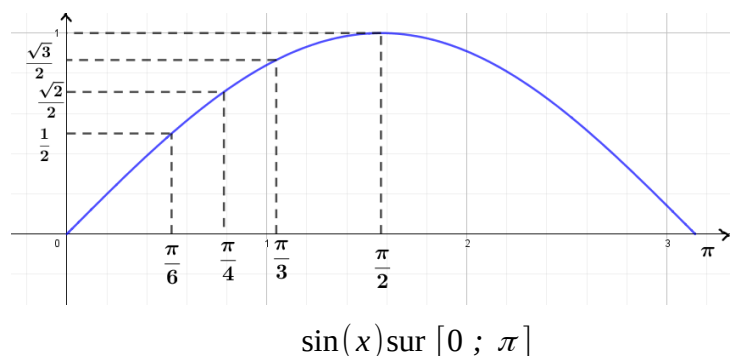
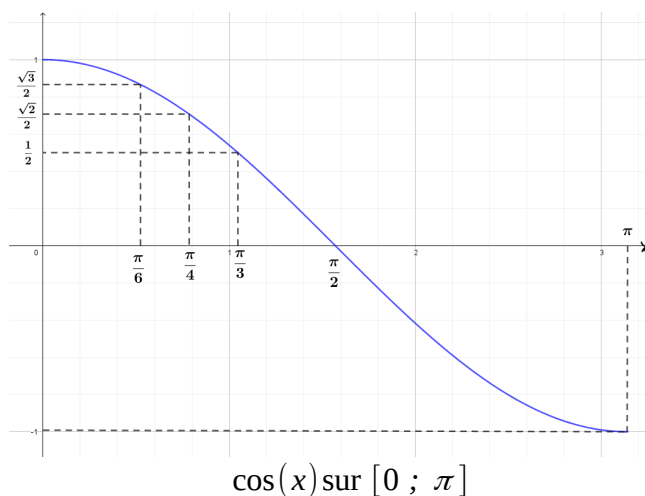
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
\sin	0	1	0

D'où le signe de $\sin(x)$ sur $[0 ; \pi]$:

x	0	π
$\sin(x)$	0	0

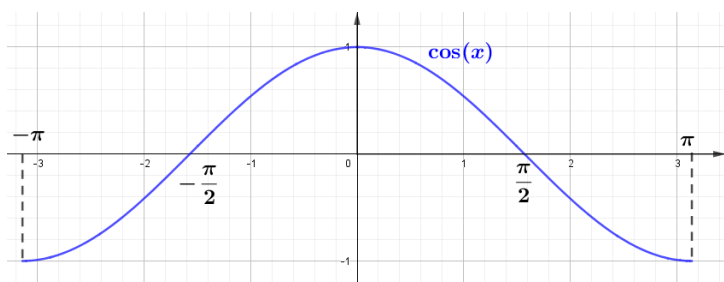
► Tracé des courbes représentatives sur $[0 ; \pi]$:

A partir du sens de variation des fonctions \cos et \sin , et en utilisant les valeurs remarquables, on obtient les courbes représentatives suivantes :

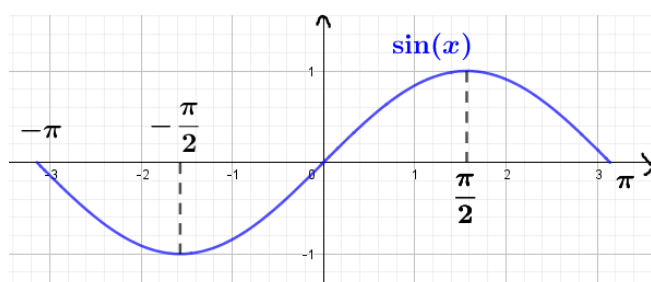


► Utilisation de la parité des fonctions :

- On a vu que \cos était une fonction **paire**, on complète donc sa représentation graphique sur $[-\pi ; \pi]$ par symétrie **par rapport à l'axe des ordonnées** :

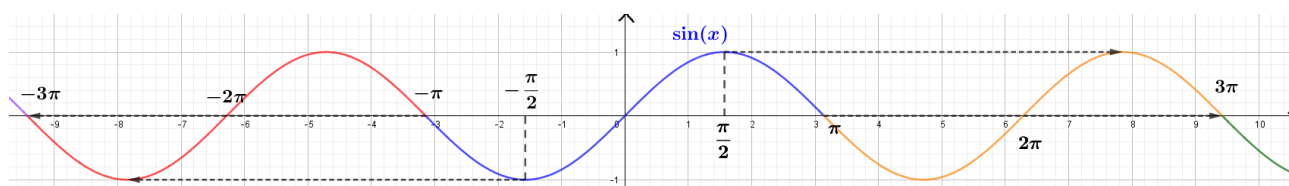
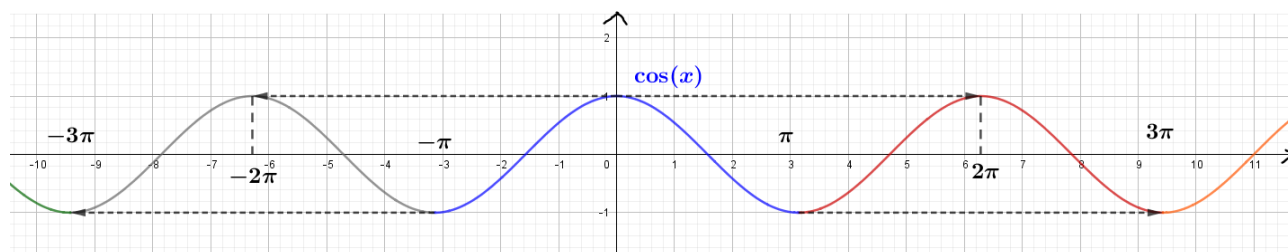


- On a vu que \sin était une fonction **impaire**, on complète donc sa représentation graphique sur $[-\pi ; \pi]$ par **symétrie par rapport à l'origine du repère** :



► Utilisation de la périodicité des fonctions :

Puisque les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π et qu'on a obtenu leur courbe représentative sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ (qui est de longueur 2π), alors on translate successivement (dans les deux sens) la courbe obtenue sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ de 2π parallèlement à l'axe des abscisses pour obtenir la courbe représentative de ces fonctions sur \mathbb{R} :



2) Résolutions d'équations trigonométriques de la forme $\cos(x) = a$:

a) Recherche de solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:

Soit a un réel, on s'intéresse à l'équation $\cos(x) = a$ où $x \in \mathbb{R}$.

1^{er} cas : si $a \notin [-1 ; 1]$, alors l'équation $\cos(x) = a$ ne possède aucune solution.

2^{ème} cas : si $a \in [-1 ; 1]$, on remarque que, puisque la fonction cosinus est 2π -périodique, il suffit de résoudre l'équation $\cos(x) = a$ sur un intervalle de longueur 2π pour en déduire l'ensemble des solutions.

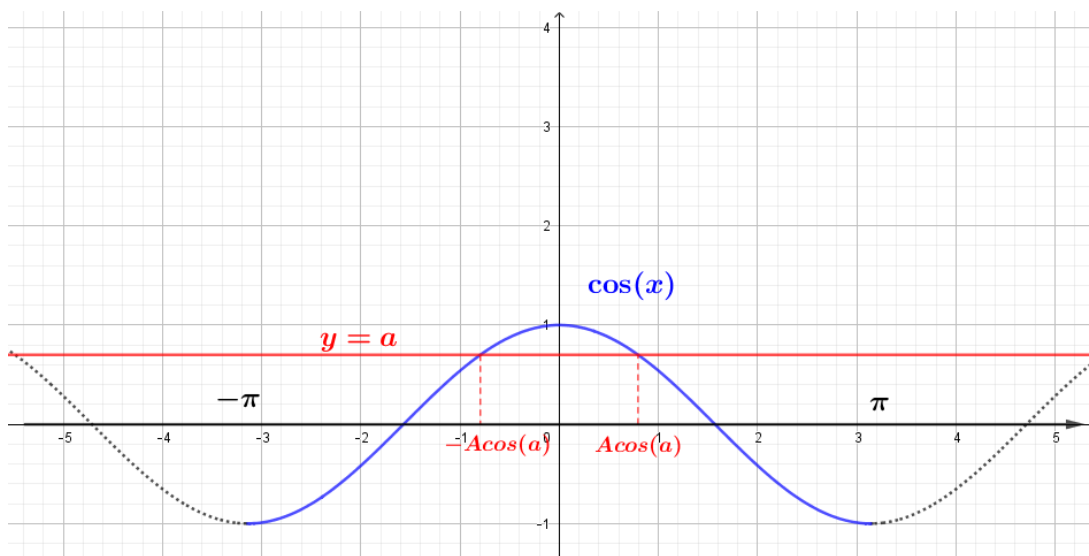
En pratique, on choisit généralement les intervalles $[-\pi ; \pi]$ ou $[0 ; 2\pi]$.

Pour le reste de cette partie, on se placera sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

► Résolution graphique de l'équation $\cos(x) = a$:

- à l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus :

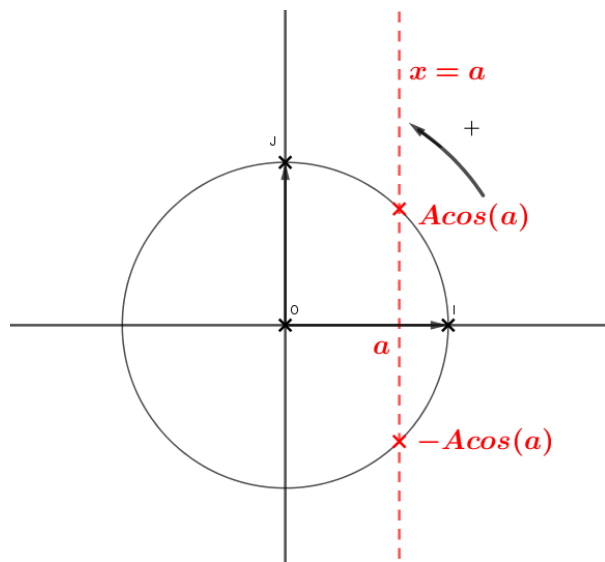
On trace la courbe représentative de la fonction cosinus et la droite d'équation $y = a$: les solutions de l'équation $\cos(x) = a$ sont les abscisses des points d'intersection de la droite et de la courbe.



- à l'aide du cercle trigonométrique :

On trace la droite d'équation $x = a$.

Les solutions de l'équation $\cos(x) = a$ sont les abscisses curvilignes des points d'intersection de la droite et du cercle trigonométrique.



Dans les deux cas, on s'aperçoit que dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ l'équation $\cos(x) = a$ possède deux solutions opposées l'une de l'autre.

Définition : Pour tout réel $a \in [-1;1]$, on appelle $\text{Acos}(a)$ (ou $\arccos(a)$) la solution de l'équation $\cos(x) = a$ dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Propriété (admise) : Pour tout réel $a \in [-1;1]$, l'équation $\cos(x) = a$ possède deux solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$: $\text{Acos}(a)$ et $-\text{Acos}(a)$.

Remarques :

- Pour $a = 1$, les deux solutions sont confondues.
- De la même manière, pour tout réel $a \in [-1;1]$ l'équation $\sin(x) = a$ possède deux solutions (éventuellement confondues) dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
- On appelle $\text{Asin}(a)$ la solution de $\sin(x) = a$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Exemple de résolution :

Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, puis dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

► Sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:

- les valeurs remarquables du cosinus nous donne que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, donc $\frac{\pi}{3}$ est une solution de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$
- on en déduit que $-\frac{\pi}{3}$ est la deuxième solution de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

Les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ sont donc les réels $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

► Sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$:

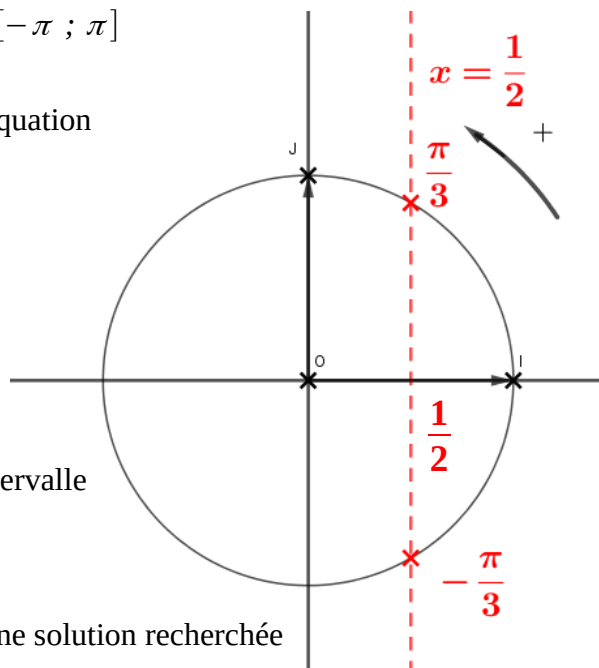
On sait que les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

- $\frac{\pi}{3}$ appartient à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, c'est donc une solution recherchée
- $-\frac{\pi}{3}$ n'appartient pas à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, mais puisque la fonction cosinus est

2π -périodique, alors $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$ est également une solution de l'équation.

Finalement, puisque $\frac{5}{3}\pi$ appartient à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, les solutions de l'équation

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5}{3}\pi$.



Remarque : Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ avec k un entier.

3) Résolutions d'inéquations trigonométriques de la forme $\cos(x) \leq a$:

a) Recherche de solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:

► 1^{er} cas : si $a \geq 1$, alors l'inéquation $\cos(x) \leq a$ a pour intervalle solution \mathbb{R} .

► 2^{ème} cas : si $a < -1$, alors l'inéquation $\cos(x) \leq a$ n'admet aucune solution.

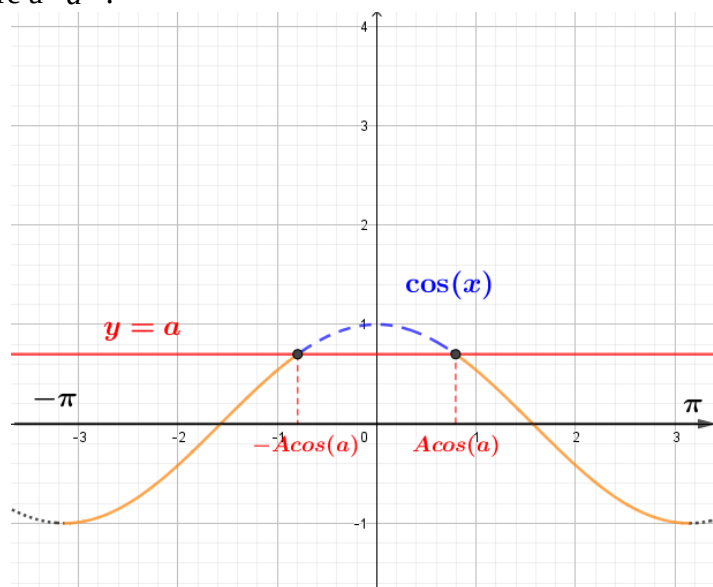
► 3^{ème} cas : si $a \in [-1 ; 1]$, on se place dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

On sait que l'équation $\cos(x) = a$ possède deux solutions sur cet intervalle et on l'utilise pour résoudre graphiquement l'inéquation $\cos(x) \leq a$:

- à l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus :

On trace la droite d'équation $y = a$.

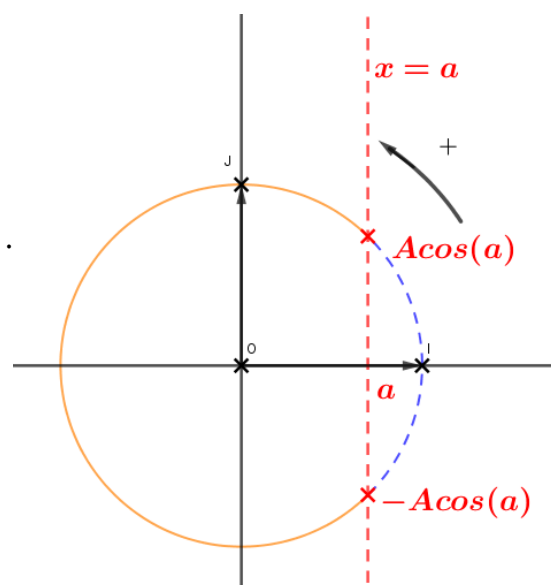
Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq a$ sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est inférieure à a .



- à l'aide du cercle trigonométrique :

On trace la droite d'équation $x = a$.

Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq a$ sont les réels associés aux points du cercle dont l'abscisse est inférieure à a .



b) Exemple de résolution :

Résoudre l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, puis dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

► Dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:

On sait que l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ possède deux solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$: $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ que l'on place sur le cercle trigonométrique.

Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ sont les réels associés aux points du cercle dont les abscisses sont inférieures à $\frac{1}{2}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ est donc :

$$\left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$$

► Dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$:

- l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$ est inclus dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, c'est donc une partie de l'ensemble des solutions ;
- l'intervalle $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right]$ n'est pas inclus dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, mais par 2π -périodicité de la fonction cosinus, l'ensemble des points associés aux réels de l'intervalle $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right]$ est également associé aux réels de l'intervalle $\left[\pi ; \frac{5\pi}{3}\right]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ est donc :

$$\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right] \cup \left[\pi ; \frac{5\pi}{3}\right] = \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right]$$

